# 微积分导引（上、下）更正

唐少强
北京大学力学系，北京100871
maotang@pku.edu.cn

October 31, 2026

# 第一章　实数与直线

P2 L5: 可定义为$[(m+1)+1]+\cdots+1$

P2 交换律和结合律的证明修改如下：

清晰起见，记$S(a)$为$a$的后继。

先通过对$c$归纳证明结合律

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

$c=1$时，结合律即为

$$a+S(b)=S(a+b)$$

假设对已有$(a+b)+c=a+(b+c)$对某个$c$成立，将$c$换为$c+1$即$S(c)$时，有

$$\begin{aligned}
&(a+b)+S(c)\\
=&S((a+b)+c) \quad \text{[P2]}\\
=&S(a+(b+c)) \quad \text{[归纳假设]}\\
=&a+S(b+c) \quad \text{[P2]}\\
=&a+(b+S(c)) \quad \text{[P2]}
\end{aligned}$$

故归纳完成。

接下来通过对$a$归纳来证明$a+1=1+a$。

$a=1$时该式两边完全相同。假设该式对某个$a$成立，将$a$换为$a+1$即$S(a)$时，有

$$\begin{aligned}
&S(a)+1\\
=&S(a+1) \quad \text{[P1]}\\
=&S(1+a) \quad \text{[归纳假设]}\\
=&1+S(a) \quad \text{[P2]}
\end{aligned}$$

最后对$b$归纳来证明一般情况的交换律$a+b=b+a$。上一结论已完成$b=1$时的归纳奠基。假设交换律对某个$b$成立，将$b$换为$b+1$即$S(b)$时，

有

$$\begin{aligned}
&a+S(b)\\
=&a+(b+1)\ \text{[P1]}\\
=&(a+b)+1\ \text{[结合律]}\\
=&(b+a)+1\ \text{[归纳假设]}\\
=&b+(a+1)\ \text{[结合律]}\\
=&b+(1+a)\ \text{[归纳奠基]}\\
=&(b+1)+a\ \text{[结合律]}\\
=&S(b)+a\quad \text{[P1]}
\end{aligned}$$

P5L-1: *增加* 对于正数$a=+a_0.a_1\cdots a_n\cdots$,记$[a]=a_0$为其整数部分。对于负数，我们类似定义$[a]=-a_0$[1].

P8：*证明结束后，增加*请读者思考以下命题是否为真：$0\in\{0.1,0.01,\cdots\}$; $1\in\{0.9,0.99,\cdots\}$;$\dfrac{1}{9}\in\{0.1,0.11,\cdots\}$.

P8L-9: *对任意的有尽小数后，增加* $\alpha,\alpha',\beta,\beta'$,满足

P9L-14: $n\to a_n$*后，增加* ,它指向定义的实数

P11：*任意不同实数间存在有理数的证明改为* 考虑

$$\begin{aligned}
c=\frac{a-b}{2}&=c_0.c_1\cdots c_n\cdots,\\
d=\frac{a+b}{2}&=d_0.d_1\cdots d_n\cdots,
\end{aligned}$$

不妨记$c$中非零的第一位为$c_n$,取

$$x=d_0.d_1\cdots d_{n+1}+0.\underbrace{0\cdots0}_{(n-1)}1.$$

P14: *12题括号内改为* 即$\forall x_1>x_2$,有$f(x_1)\geq f(x_2)$.

*15题加解释* 若$f(x^*)=x^*$,称$x^*$为$f(x)$的一个不动点.

[1]这里可以有其它方式来定义出实数“截出来”的整数，譬如floor函数（指不大于$a$的整数：$a$非负时取为$a_0$,负整数时取为$-a$,负数但非负整数时取为$-(a_0+1)$），或者celling函数（指不小于$a$的整数：$a$非正时取为$-a_0$,正整数时取为$a$,正数但非正整数时取为$(a_0+1)$）.

# 第二章　序列与函数的极限

P17L3: 最后一个括号内分母改为$2^{N-1}+1$.

P19L1: 有限项无关，后面增加：而只与后面的项相关。

P19L-11: 简单一些。后面增加：当然更一般些，如果证出小于$k\varepsilon$亦可，只要保证$k>0$与$\varepsilon$无关。不过作为初学者，我们尽量在证明的前段调整系数，使得最后的不等式为小于$\varepsilon$.

P22L1: 定理*2.4*后边注明保号性。

P22L-0: 增加一段话 四则运算定理表明，我们可以通过计算的办法证明极限存在，也就是说，如果能够计算出极限（等式右边有），则极限存在（等式左边有）。

**例2.0.1.** 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2n+1}{3n^2-1}$.

解：根据极限的四则运算法则，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{3n^2-1} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{3-\dfrac{1}{n^2}}\\ &= \frac{1+2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}{3-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}\\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

P23L9：括号后加一句,或者用例2.6的结论。

P23L-4: 两个绝对值的线都要拉长

P24：夹挤原理后加一个例子

**例2.0.2.** 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}$.

解：注意到

$$-\frac{1}{n}\le\frac{\sin n}{n}\le\frac{1}{n},$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

由夹挤原理知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0.$$

P28 最下方增加：有趣的是，存在这样的序列：任何$[0,1]$中的数，都有子序列收敛到该数。譬如，

$$\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{2}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{3}{3},\frac{1}{4},\cdots$$

你看出来譬如取$\sqrt{2}-1$，该怎样取子序列吗？

P31L2: 改$p=N+3$.

P37L-1L-3: 改$\leq$为 $<$.

P39L14：就有之后的证明改为：

$$|x_m-a|=\frac{\eta}{2m}<\frac{\eta}{2N}<\delta,$$

同理，$|x_n-a|<\delta$. 于是$|f(x_m)-f(x_n)|<\varepsilon$.因此，$\{f(x_n)\}$为基本列，由序列的柯西收敛原理知其必收敛。不妨记$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

由$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A,\exists M\in\mathbb{N}$，当$n>M$时，有$|f(x_n)-A|<\varepsilon$.特别地，取$n^*=\max\left\{M,\left[\frac{\eta}{2\delta}\right]\right\}+1$,则$\forall|x-a|<\delta$，必有

$$|x_{n^*}-a|<\delta,\text{及}|f(x_{n^*})-A|<\varepsilon.$$

因此

$$|f(x)-A|\leq|f(x)-f(x_{n^*})|+|f(x_{n^*})-A|<2\varepsilon.$$

P40L5: 去心邻域$U$改为$\mathring{U}$.

P42：图*2.9*中左半轴改为粗黑线。L-3：*sign*改为 sgn.

P49L1: 加一个说明：这里极限均指有限值。

# 第三章　连续函数

P50L-2：前面改为 $\forall 1 > \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon > 0$, L-1：最后一项改为 $= \varepsilon^2 < \varepsilon$.

P51L7: 分母改为 $Q(g(x))$.

P52L4L9: $sign$改为 sgn.

P53: 图*3.1* 实数轴除原点改为黑线。

P56L4: 加一个脚注：这一性质称为闭区间$[a, b]$是序列紧的，在下册多维空间中作更多讨论。

P61L2：$g(x)$的定义改为

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x + 1, & 0 < x \leq 1, \\ x - 1, & 1 < x \leq 2, \end{cases}$$

P65L2: 增加脚注：这里我们证明了对于有理数$r \in (0, 1)$,实数$x > 0$,成立$(1 + x)^r \leq 1 + rx$.

P68L-7 增加一段 前述讨论也同时定义了幂函数$x^\mu$ $(\mu \in \mathbb{R})$.

P69L-5 等式右端第一项分母改为 $x^m$.

P74第12题：最小改为最大。第14（1）题：$\sin x$改为 $(\sin x)$.

# 第四章　导数

P89L1 "证明"开始改为：说明.若$x'(t_0)\neq 0$,且$x'(t)$在该点连续，则$x(t)$在$t_0$的邻域上严格单调连续，

P95L7 “这样的$x_0\cdots$ 统称极值”移至“若上述”前

P98L7 例*4.18*之后增加：这个例子里，如果我们令$y=0$,就得到$|\sin x|\leq |x|$.注意这也正是之前求出的一个重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 的基础。请读者思考，这里有没有循环论证的风险？

P100L7 “在某$\mathring{U}(x_0,\delta)$”改为：在某$U(x_0,\delta)$

P101L-4 “柯西”前增加：以下

P102L1 "考察"改为：注意到$g'(x)\neq 0$,因此$g(b)-g(a)\neq 0$,可定义

P102L-2 删去极限符号和$\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$之间的等号

P112L-2L-8 "$o(x^n)$"改为$o((x-a)^n)$

P112L-4L-6 "$o(x^{n-1})$"改为：$o((x-a)^{n-1})$

P114L1 $A(h^n)$改为：$Ah^n$

P114L7 $f(x)$后增加：$-f(x_0)$

P117L13-14 $P,Q$表达式改为：

$$\begin{aligned}P_{m+1}(x^2)&=Q'_m(x^2)2x^2(1+x^2)-Q_m(x^2)[(4m+3)x^2-1],\\ Q_{m+1}(x^2)&=P'_{m+1}(x^2)2(1+x^2)-P_{m+1}(x^2)2(2m+3).\end{aligned}$$

可以推出

$$\begin{aligned}P_{m+1}(x^2)&=-(4m+2)x^2Q_m(x^2)-(2m+1)(2m+2)(1+x^2)P_m(x^2),\\ Q_{m+1}(x^2)&=-(4m+6)P_{m+1}(x^2)-(2m+2)(2m+3)(1+x^2)Q_m(x^2).\end{aligned}$$

P119L3 $x_1,x_2$改为：$x_1<x_2$

P119L8 中间表达式分子$f(x_2)-x_1$改为；$f(x_2)-f(x_1)$

P121L12 第二个小于号改为：$\leq$

P174L-2 脚注等式右端分母负号改为：$+$

P194 习题*9(4)* 括号内说明改为：这里$\varphi(x)>0,\psi(x)>0$

P194 习题*9(5)* 增加说明：（这里$\varphi(x)>0$）

P195 习题*25* “求证”前增加：且$f(x)$在$(a,b)$可导

P195 习题*27 (2)(3)* 待证不等式的<三个都改为 $>$

P197 习题*37* 待证结论$L=\cdots$改为 $L\approx\dfrac{1}{2}mgl\theta^2$

P198 习题*46(3)* 待证不等式的<改为 $\leq$

# 第五章　不定积分

P145L8,9,10 等号接着的系数$\frac{1}{a^2}$都改为$\frac{1}{a}$

P146L8 题目后补充说明：$(a>0)$

P146L-6 题目后补充说明：$(a>0)$

P152L12 第*(4)*种情形$x^{\lambda}(a=bx^{\mu})^{\gamma}$改为：$x^{\lambda}(a=bx^{\mu})^{\nu}$

P154L-2 习题*3(12)*中被积函数$\arcsin x^2$改为：$(\arcsin x)^2$

P156L-3 习题*6(6)*中被积函数$\frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{2}{3}}}$改为：$\frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

P156L-1 习题*3(12)*中被积函数中$\arctan(x^2)$改为：$\arctan x$

# 第六章　定积分

P168L4 $v \in C[a,b]$改为：$v \in C^1[a,b]$

P169L2L3 积分上限*1*改为 $a$

P170 第一个公式$\theta$ 改为 $\Delta\theta$

P173L-8 正劈锥体的定义中，右花括号前增加：$,H > z \geq 0$

P174 脚注中公式右端分母中$-$ 改为 $+$

P175L-4 表达式中$\dfrac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}$改为：$\dfrac{b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$;括号内$\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$ 改为：$\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}$

P175L-3 ln里面的表达式第一项$\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}z$改为：$\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}z$

P180L6 习题*6(1)*中”偶函数,“后增加：一个周期内均值位0的

P180L7 习题*6(2)*中左边的被积函数改为：$x^3 f(x^2)$

P180L9 习题*6(4)*中左边的被积函数改为：$f(t)(x-t)$

# 第七章　定积分的进一步讨论

P1L-10“有不定积分的函数可积（牛顿-莱布尼茨公式）；闭区间上连续函数可积”改为 闭区间上连续且有不定积分的函数可积（牛顿-莱布尼茨公式）

P5L11 后增加一段解释：

$L(f,P\cup P_0)$与$L(f,P)$之间的差别只可能来自于$P_0$中分点在的小区间上（共$n$个，且如果与$P$中分点重合则不产生差别）。只看这部分产生的影响，只要$|P|$充分小，就可控制$L(f,P\cup P_0)-L(f,P)$.

P12L6“若$f\in C([a,b])$”改为：若$f\in C[a,b]$

P14L-4 加讨论如下：

该定理就是上一章中的引理6.2，区别在于这里仅设$f,g$可积，无需$fg$可积的假设。

若$f,g\in C[a,b]$,定理的证明也可以采用柯西中值定理。由可积性及$g\geq 0$,同上一般有$\int_a^b g(t)\mathrm{d}t\neq 0$,令

$$\phi(x)=\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t,\quad \psi(x)=\int_a^x g(t)\mathrm{d}t,$$

易知$\phi,\psi\in C^1[a,b]$,于是$\exists c\in(a,b)$,

$$\begin{aligned}\frac{\phi'(c)}{\psi'(c)}&=f(c)\\&=\frac{\phi(b)-\phi(a)}{\psi(b)-\psi(a)}\\&=\frac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}.\end{aligned}$$

P15L-2 $f\in C^1[a,b]$后加：非负

P17L-8至-10 三个求和号外面各加一对绝对值符号。

P17L-9 $\int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)$ 后加 $\mathrm{d}x$

P20L12“$0\leq u\leq 1$”改为：$0\leq u\leq h$

P20L12 梯形公式右端分子1 改为 $b-a$

P21L-7 在“二阶收敛的.”后加：它们对于分段常数和分段折线函数都可以做到精确（分割需包含所有间断点）。

P22L5 在后面加一句：对于分段二次和三次函数可以达到精确（分割需包含所有间断点）。

P23L7 改为 $\leq\dfrac{2}{2n+1}$.

P24 第12题中，两处$\sqrt{\dfrac{2}{3}}$改为 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

P23 最后一段改为一节，内容如下：

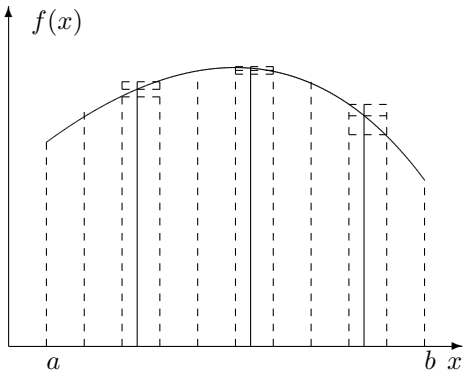



图 7.1 增加分点对达布和的影响: 虚线为$P$的分点，实线为$P_0$增加的分点。

### §7.0.1 斯特林公式

斯特林(Stirling)公式是关于$n!$的一个逼近公式。以下分四步逐渐来逼近它.

第一步，我们证明

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

为此，先定义

$$f(x) = \begin{cases} (1+x)^{1/x}, & x \neq 0; \\ e, & x = 0. \end{cases}$$

该函数连续。取对数再求导知

$$(\ln f(x))' = \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)},$$

右式分母恒正。分子在$x=0$处为0，而再求导一次为$-\ln(1+x)$,在原点两侧变号，这表明它在两侧都为负.

于是$\ln f(x)$从而$f(x)$本身都是单调下降的，这就是说，$x>0$时$f(x)<e$,而$x<0$时$f(x)>e$.特别地，就得到$\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < e,$$

以及

$$\left(1-\frac{1}{k+1}\right)^{-(k+1)} = \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1} < e.$$

分别写出$k=1,\cdots,n-1$时的不等式

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{1}\right)^{1} &< e < \left(\frac{2}{1}\right)^{2};\\ \left(\frac{3}{2}\right)^{2} &< e < \left(\frac{3}{2}\right)^{3};\\ &\vdots\\ \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} &< e < \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n};\end{aligned}$$

这些式子乘在一起得

$$\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}<e^{n-1}<\frac{n^n}{(n-1)!},$$

于是

$$\frac{en^n}{n!}<e^n<\frac{en^{n+1}}{n!},$$

这样，就给出了

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n<n!<en\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

第二步，我们证明

$$n!\sim an^{n+\frac{1}{2}}e^{-n},$$

这里$a$为一个常数.

先给出一个不等式

$$0<\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1<\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

事实上，对于凸函数$\frac{1}{x}$考虑矩形公式和梯形公式近似积分知

$$\frac{2u}{c}<\int_{c-u}^{c+u}\frac{1}{x}<u\left(\frac{1}{c+u}+\frac{1}{c-u}\right),$$

取$c=n+\frac{1}{2},u=\frac{1}{2}$得到

$$\frac{1}{n+\frac{1}{2}}<\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right).$$

整理后即得上述不等式。

接着，令

$$a_n=\frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}},$$

比较相邻两项得

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}},$$

取对数再利用上述不等式有

$$0 < \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 < \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

因此，

$$a_{n+1} < a_n,$$

且

$$a_{n+1} e^{-\frac{1}{4(n+1)}} > a_n e^{-\frac{1}{4n}}.$$

从而看出

$$\left\{\left[a_n e^{-\frac{1}{4n}}, a_n\right]\right\}$$

构成一个闭区间套. 由闭区间套原理，有唯一的数a,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a,$$

满足

$$a_n e^{-\frac{1}{4n}} < a < a_n.$$

回到$a_n$的定义，就证明了这一步.

第三步，利用沃利斯公式计算$a$.

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \left[\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\right]^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \left[\frac{2^{2n} a^2 n^{2n+1} e^{-2n}}{a(2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n}}\right]^2 \\
&= \frac{a^2}{4}.
\end{aligned}$$

据此得到

$$a = \sqrt{2\pi}.$$

第四步，回到第二步的结论，就有

$$a_n e^{-\frac{1}{4n}} < \sqrt{2\pi} < a_n,$$

根据$a_n$定义，就是说

$$\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{4n}},$$

从而，存在$\theta \in (0,1)$,成立斯特林公式

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta}{4n}}.$$

斯特林公式还有另一种证明方法.

由$\ln x$的单调性，

$$\int_{n-1}^{n} \ln x \mathrm{d}x < \ln n < \int_{n}^{n+1} \ln x \mathrm{d}x,$$

因此，

$$\int_{0}^{n} \ln x \mathrm{d}x < \ln n! < \int_{1}^{n+1} \ln x \mathrm{d}x.$$

积分得

$$n \ln n - n < \ln n! < (n+1)\ln(n+1) - n.$$

定义

$$d_n = \ln n! - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n + n,$$

注意到

$$\frac{n+1}{n} = \frac{1 + \dfrac{1}{2n+1}}{1 - \dfrac{1}{2n+1}}$$

以及泰勒展开式

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t} = t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \cdots, \quad |t| < 1.$$

从而计算

$$\begin{aligned} d_n - d_{n+1} &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \frac{n+1}{n} - 1 \\ &= \frac{1}{3(2n+1)^2} + \frac{1}{5(2n+1)^4} + \cdots \\ &< \frac{1}{3}\left[\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + \cdots\right] \\ &= \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right). \end{aligned}$$

跟上一种证明类似，利用闭区间套$\left\{\left[d_n - \dfrac{1}{12n}, d_n\right]\right\}$套出极限$d$，以及沃利斯公式得到

$$e^d = \sqrt{2\pi}.$$

注意到

$$d_n - \frac{1}{12n} < d = \ln \sqrt{2\pi} < d_n,$$

知存在$\tilde{\theta} \in (0,1)$,有

$$d_n = ln\sqrt{2\pi} + \frac{\tilde{\theta}}{12n},$$

因此，有更好的逼近公式

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\tilde{\theta}}{12n}}.$$

# 第八章　广义积分

P33L11“求极限.”改为：求极限，而$\forall A > a, \int_a^A f(x)\mathrm{d}x$可积是已假设成立的.

P39 作业*4(4)* $(x-3)$ 改为 $(3-x)$

# 第九章　多维空间

P47L2 $\lim\limits_{x\overset{\Omega}{\to}a}$ 改为$\lim\limits_{x\overset{E}{\to}a}$

P47L8 “若开集”改为 若集合

P50L12 $|x-a|$改为 $\|x-a\|$

P50L-9 $\check{U}(0,\eta)$改为$\check{U}(a,\eta)$

P52L2 “$A$”改为： $B$

P52L4 新开一段：不等式性质为：若

$$f(x)\geq g(x),\quad \forall x\in\check{U}(a),$$

则

$$\lim_{x\to a}f(x)\leq\lim_{x\to a}g(x).$$

P53L-6 “则上述两种累次极限都存在且等于重极限.”改为：累次极限也存在，那么它们等于重极限。考察函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}, & \text{若}x\neq0,y\neq0;\\ 0, & \text{否则,}\end{cases}$$

它有重极限，但无累次极限。

P57L2 $f(U(a,\delta))$ 改为： $f(U(a,\delta)\cap\Omega)$

P57L2 “因此，$U(a,\delta)$”改为：因此，$U(a,\delta)\cap\Omega$开，于是有更小的正数$\tilde{\delta}$,满足$U(a,\tilde{\delta})\subset U(a,\delta)\cap\Omega$,且$U(a,\tilde{\delta})$

P57L7 后新开一段：

这一节我们要注意哪些与$\mathbb{R}$中一样，哪些不一样。例如，函数极限序列式定义与$\varepsilon-\delta$定义等价、极限存在必唯一、四则运算、复合函数、函数不等式等，借助遗传定理，都同样成立。但多维空间里的几何变得更复杂，多了沿集合收敛的讨论；多维空间中点列不可比较大小。

P61L-5 $bi$ 改为： $b_i$

P65L-1 函数改为：

$$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}, & \text{若}x\neq0,y\neq0;\\ 0, & \text{否则.}\end{cases}$$

P66L-3 $x^3$改为 $x^4$

P66 加一道习题：考察曲线$\Gamma:y=\sin\dfrac{1}{x},x\in(0,1)$,以此为中心线宽度为$e^{-\frac{1}{x^2}}$形成一个开集$E$。试证明：(1) $E$连通；(2) $\overline{E}$中含有线段$\{(x,y)|x=0,y\in[0,1]\}$; (3) $\overline{E}$不连通。

# 第十章　多元微分

P68L12 加一句 这里$k=\infty$理解为直线$x-x_0=0$.

P70图10.2 图标中$f(x)$改为：$f(x,y)$

P72L9 $B$的表达式分母$\partial x$改为 $\partial y$

P74L6 公式右边“$O(h)$”改为：$o(1)$

P74L8 本定理证明后面加一段：定理给出了可微的充分条件，但并不是必要条件。如函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{若}(x,y)\neq(0,0);\\ 0, & \text{否则,}\end{cases}$$

它在原点偏导数不连续，但处处可微。

P74L12 定义后加一段：注意这里不要求各偏导数可微。

P77L-1 $=$ 改为 $\approx$

P78L2 最右端左下角分量偏微分分子中“$x^n$”改为：$x^m$

P79L-2 脚注开始处添加 当$m=p$时，

P79L-9 右端偏微分分母中“$x^n$”改为：$x^m$

P80L-1 脚注加一句：注意物理或几何上只把$\nabla_{(x,y)}$称为梯度，参见本书场论部分的讨论。

P85L-10,L-7,L-6,L-4 公式中括号内偏导数的分子部分“$\partial f$”（共出现*10*次）改为 $\partial$

P89L3 最后接一句：如果$D$是凸的，上述开（闭）线段为其子集，这是有限增量公式成立所必需的。

P96L13 本节最后加一段解释：

为了解释上述关于二阶微分的形式运算是合理的，看一个更简单的例子：

$$F(p,x,y)=0.$$

比较两种做法，一是形式运算。先求一阶微分：

$$0=dF=F_p\mathrm{d}p+F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y,$$

于是

$$\mathrm{d}p=-\frac{1}{F_p}(F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y),$$

从而读出

$$\partial_x p=-\frac{F_x}{F_p},\qquad \partial_y p=-\frac{F_y}{F_p}.$$

以$x,y$为自变量，注意到$\mathrm{d}^2x=\mathrm{d}^2y=0$,再做一次微分得到

$$0=\mathrm{d}^2F=F_p\mathrm{d}^2p+F_{pp}(\mathrm{d}p)^2+2F_{px}\mathrm{d}p\mathrm{d}x+2F_{py}\mathrm{d}p\mathrm{d}y+F_{xx}(\mathrm{d}x)^2=2F_{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+F_{yy}(\mathrm{d}y)^2,$$

把上面一阶微分$\mathrm{d}p$代入并整理得

$$\begin{aligned}0\quad&=F_p\mathrm{d}^2p+\left(F_{pp}\frac{F_x^2}{F_p^2}-2F_{px}\frac{F_x}{F_p}+F_{xx}\right)(\mathrm{d}x)^2\\&\quad+2\left(F_{pp}\frac{F_xF_y}{F_p^2}-\frac{F_xF_{py}+F_yF_{px}}{F_p}+F_{xy}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\quad+\left(F_{pp}\frac{F_y^2}{F_p^2}-2F_{py}\frac{F_y}{F_p}+F_{yy}\right)(\mathrm{d}y)^2.\end{aligned}$$

由此读出

$$\begin{aligned}\partial_{xx}p\quad&=-\frac{1}{F_p}\left(F_{pp}\frac{F_x^2}{F_p^2}-2F_{px}\frac{F_x}{F_p}+F_{xx}\right);\\\partial_{xy}p\quad&=-\frac{1}{F_p}\left(F_{pp}\frac{F_xF_y}{F_p^2}-\frac{F_xF_{py}+F_yF_{px}}{F_p}+F_{xy}\right);\\\partial_{yy}p\quad&=-\frac{1}{F_p}\left(F_{pp}\frac{F_y^2}{F_p^2}-2F_{py}\frac{F_y}{F_p}+F_{yy}\right).\end{aligned}$$

再看另一种“初等”做法。简单起见，不妨考虑在$p_0=x_0=y_0=0$处对$F(p,x,y)$和$p(x,y)$分别作二阶多项式展开：

$$\begin{aligned}F(p,x,y)=\quad&F_0+F_{11}p+F_{12}x+F_{13}y+F_{21}p^2+F_{22}x^2+F_{23}y^2+F_{24}px+F_{25}py\\&+F_{26}xy+o(p^2+x^2+y^2),\end{aligned}$$

$$p(x,y)=p_0+P_{11}x+P_{12}y+P_{21}x^2+P_{22}xy+P_{23}y^2+o(x^2+y^2).$$

上面多项式中的大写字母为常数，且由泰勒公式易知它们跟偏导数的关系. 将$p(x,y)$的表达式代入$F(p,x,y)=0$得到

$$F_{11}(P_{11}x+P_{12}y+P_{21}x^2+P_{22}xy+P_{23}y^2)+F_{12}x+F_{13}y+F_{21}(P_{11}x+P_{12}y)^2$$
$$+F_{22}x^2+F_{23}y^2+(F_{24}x+F_{25}y)(P_{11}x+P_{12}y)+o(x^2+y^2)=0.$$

从一次项系数为0读出

$$F_{11}P_{11}+F_{12}=0,\qquad F_{11}P_{12}+F_{13}=0,$$

于是

$$P_{11}=-\frac{F_{12}}{F_{11}},\qquad P_{12}=-\frac{F_{13}}{F_{11}}.$$

把系数与偏导数关系代入，这就给出了$\partial_x p,\partial_y p$.

从二次项$x^2$系数为0读出

$$F_{11}P_{21}+F_{21}P_{11}^2+F_{22}+F_{24}P_{11}=0,$$

于是

$$\begin{aligned}P_{21}&=-\frac{1}{F_{11}}\left(F_{21}P_{11}^2+F_{22}+F_{24}P_{11}\right)\\&=-\frac{1}{F_{11}}\left(F_{21}\frac{F_{12}^2}{F_{11}^2}+F_{22}-F_{24}\frac{F_{12}}{F_{11}}\right).\end{aligned}$$

把这些系数与偏导数的关系代入，这就是前面的$\partial_{xx}p$.另两个二阶偏导数类似.

P96L-3“向量”后加：（本节中均以列向量表示）

P98L14 sup下的取值范围“$\|x|=1$”改为：$\|x\|=1$

P99L7-8 将“我们同样也称导数$Df=A.$”改为：即

$$A=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{p\times m},$$

也记为$\dfrac{\partial f}{\partial x}$或$\partial_x f$. 本书中，除非特别说明，我们总是把向量值函数的每一个分量的各偏导数写在同一行，而把对于每一个自变量的偏导数写在同一列。

P99L-7“$Df$”改为：$\dfrac{\partial f}{\partial(x,y)}$

P99L-1“$D$”改为（共5处）：$\partial_x$

P100L3“$D$”依次改为（共3处）：$\partial_x,\partial_y,\partial_x$

P100L4“$f_2(x)$”改为：$\cdots,f_p(x)$

P100L5“$D$”改为：$\partial_x$

P100L8“$D$”改为：$\partial_x$

P100L13“$D_x$”改为：$\partial_x$

P100L14“$D_x f$”改为：$\partial_x f$

P100L14“$Df$”改为：$\partial_{(x,y)}f$

P100L-8“$(b-a)_{m\times 1}^T$”改为：$(b-a)_{m\times 1}$

P100L-6“$Df$”改为：$\partial_x f$

P100L-3“$(b-a)_{m\times 1}^T$”改为：$(b-a)_{m\times 1}$

P100L-2“$(f(b)-f(a))_{1\times p}Df(c)_{p\times m}(b-a)_{m\times 1}^T$”改为：$(f(b)-f(a))_{1\times p}^T\partial_x f(c)_{p\times m}(b-a)_{m\times 1}$

P100L-1“$Df$”改为：$\partial_x f$

P101L2“$Df$”改为：$\partial_x f$

P101L4“$Df(c)_{p\times m}(b-a)_{m\times 1}^T$”改为：$\partial_x f(c)_{p\times m}(b-a)_{m\times 1}$

P101L4“$\nabla_x f_i(c)(b-a)^T$”改为：$\partial_x f_i(c)(b-a)$

P102L9“$Df$”改为：$\partial_x f$

P107L-1,-3,-5,-7,-9,-10“$D_x f, D_y f$”分别改为（7处，6处）：$\partial_x f, \partial_y f$

P108L2“$\lambda = -D_y f\cdot(D_y g)^{-1}$”改为 $\lambda = \lambda^* = -\partial_y f\cdot(\partial_y g)^{-1}$

P108L4“$D_y$”改为（2处）：$\partial_y$

P108L6“$D_x$”改为：$\partial_x$

P108L13 ”，且”前面增加：$,(\partial_y g)_{p\times p}$可逆

P108L-1,-3,-5“$D_x, D_y$”分别改为（各4处）：$\partial_x, \partial_y$

P109L-7“最小值.”改为：最小值（这里按照线性代数的习惯，$x$为行向量）.

P109L-5 ”$2Ax_0^T - 2\lambda x_0^T$”改为：$2x_0A - 2\lambda x_0$

P111L-1,-2,-3,-4,-6,-7“$D$”改为（10处）：$\nabla$

P112L11“$D$”改为（2处）：$\nabla$

P113L9,10,11“$\nabla_r$”改为（3处）：$\nabla$

P118L11“$\left(\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^6$”改为：$\left(\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^3$

P118L12“$\left(\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^3$”改为：$\left(\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^6$

P121L-2“$\mathbf{n}\cdot\ddot{\mathbf{r}}$”后添加：$=\kappa\mathbf{n}\cdot\mathbf{N}$

P122L9 后面加一段：

第二基本形式也可以从曲面到切平面的“有向距离”来理解。

$$\begin{aligned}&(\mathbf{r}(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v)-\mathbf{r}(u_0,v_0))\cdot\mathbf{n}\\ =\ &\left[(\mathbf{r}_u\Delta u+\mathbf{r}_v\Delta v)+\frac{1}{2}(\mathbf{r}_{uu}(\Delta u)^2+2\mathbf{r}_{uv}\Delta u\Delta v+\mathbf{r}_{vv}(\Delta v)^2)\right]\cdot\frac{\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\|}\\ =\ &\tfrac{1}{2}(L(\Delta u)^2+2M\Delta u\Delta v+N(\Delta v)^2).\end{aligned}$$

P123L-6“于是$\kappa_n$”后加：及$\mathbf{T}$

P123L-5“确定了”后加：，与具体曲线无关，是曲面在该点及该方向的切线确定的

P123L-4“扭转”后加：，即$\mathbf{N}$可变

P127L9 ”曲线”改为：曲面

P127L-1 加一题：推导科里奥利（Coriolis）力的公式。

# 第十一章　多元积分

P128L-2 “$[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_m,b_m]$”改为：$[a^1,b^1]\times\cdots\times[a^m,b^m]$

P129L-12 “$Q_J$”后加：，其中$J$为多重指标。

P134L10 “$[a,b]$”改为：$Q$

P134L-7 “$[a,b]$”改为：$Q$

P135L-1 最后接：这里的积分是用下一节讲的累次积分来算的。

P137L-12 最后接：这里新增的标志点不在$\partial Q$上。

P137L-5 “$<\varepsilon$”改为：$+\Omega_1<2\varepsilon$. 其中$\Omega_1$为$\partial\Omega$周围一圈小方块上对$\Omega$的贡献。以二维为例，就是$\omega_{ij}\mathrm{vol}(Q_{ij})$之和；当我们设$|f|\le L$, 并取

$$|\tilde{P}|<\frac{\varepsilon\min_i|b_i-a_i|}{2L\mathrm{vol}(Q)},$$

则$\Omega_1<\varepsilon$.

P138L8 “sup”的下标“$a\le x\le b$”改为（*2*处）：$x\in Q$

P139L5,8 “$\Omega$”改为：$Q$

P144L-3 “连续函数$f(t)$”改为：一元连续函数$f(s)$

P144L-2 “$t_{n-2}$”改为：$t_{m-2}$

P144L-1 “$(x-t)^{m-1}f(t)\mathrm{d}t$”改为：$(x-s)^{m-1}f(s)\mathrm{d}s$

P145L6,7,8,10 “$t$”改为（*12*处，含$\mathrm{d}t$中的$t$）：$s$

P147L14 “$F(x)$”改为：$f(x)$

P150L6 “$\mathrm{d}u\mathrm{d}v$”改为：$\mathrm{d}(u,v)$

P150L-5 后加一段说明：这里$\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}u,\mathrm{d}v$要理解成向量，即$\mathrm{d}xe_x,\mathrm{d}ye_y,\mathrm{d}ue_u,\mathrm{d}ve_v$.

P156L3,8,9,11,12,13 “$\gamma$”改为（共*10*处）：$\Gamma$

P157L2,3,4,6 “$\gamma$”改为（共*6*处）：$\Gamma$

P157L3,6 “$\mathbf{r}(s)$”改为（*2*处）：$\mathbf{r}$

P157L-9 “$D\in\mathbb{R}^2$”改为：$D\subset\mathbb{R}^2$

P157L-5 “$\int_D\|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$”改为：$\int_D\mathrm{d}\sigma=\int_D\|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\|\mathrm{d}(u,v)$

P159L5 后面加：$=1$

P159L-10,-8 “$\varphi$”改为（*7*处，$\mathrm{d}$后面的不改）：$\theta$

P159L-8 “$\theta$”改为（*2*处，$\mathrm{d}$后面的不改）：$\varphi$

P163L8 “$x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x$”改为：$x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$

P166 把*L5-9*“如果”到“$C=1$”这段移至*L-2,*“参数表示下，有”改为：于是有

P169图11.19(a) “$y_1(t),y_2(t)$”改为：$y_1(x),y_2(x)$

P172L7 后开一段：用我们后面的记号，就是

$$\oint_{\partial\Omega}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}=\iint_\Omega\nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}\sigma.$$

P173L4 "$\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}z$" 改为：$\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x$

P173L4 后开一段：用我们后面的记号，就是

$$\oiint_{\partial\Omega}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}\sigma=\iiint_{\Omega}\nabla\cdot\mathbf{F}\mathrm{d}(x,y,z).$$

P174L15 "$\omega\mathbf{r}\times\mathbf{k}$" 改为：$\mathbf{r}\times\omega\mathbf{k}$

P174L19 "$\mathbf{F}$" 改为（2处）：$\mathbf{v}$

P175L9 "$\mathbf{F}\cdot\nabla\mathbf{G}+\nabla\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}$" 改为：

$$\mathbf{F}\cdot(\nabla\mathbf{F})+\mathbf{G}\cdot(\nabla\mathbf{F})+\mathbf{F}\times(\nabla\times\mathbf{G})+\mathbf{G}\times(\nabla\times\mathbf{F})$$

P175L12 "$\nabla\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}$" 改为：$\mathbf{G}\cdot\nabla\mathbf{F}$

P175L-6,-12 "$(\mathbf{F}\cdot\nabla)\mathbf{G}-$" 改为（2处）：$-(\mathbf{F}\cdot\nabla)\mathbf{G}+$

P177L15 "$\dfrac{\partial q_1}{\partial x}\mathbf{k}$" 改为：$\dfrac{\partial q_1}{\partial z}\mathbf{k}$

P178L-7 前加一段：即令

$$\nabla u=\alpha\mathbf{e}_1+\beta\mathbf{e}_2+\gamma\mathbf{e}_3,$$

特别的，考虑$\mathrm{d}q_2=\mathrm{d}q_3=0$时，有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u&=\nabla u\cdot(h_1\mathrm{d}q_1\mathbf{e}_1)\\&=\alpha h_1\mathrm{d}q_1\\&=\frac{\partial u}{\partial q_1}\mathrm{d}q_1,\end{aligned}$$

于是

$$\alpha=\frac{1}{h_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}.$$

$\beta,\gamma$同理可得。

P179L5 "$Ph_3h_1,Ph_2h_3$" 分别改成：$Qh_3h_1,Rh_2h_3$

P180L6 "$\tan(x+y^2)$"改为：$\sin(x+y^2)$

P180L13 "$\int_1^3\int_1^{3-x}$" 改为：$\int_1^3\int_0^{3-x}$

P181L-1,-6 "第一类" 改为（2处）：第一型

P182L4,11 "第二类" 改为（2处）：第二型

P182L-5 "单位圆周"后添加：（逆时针）

P183L-2 "以及"改为：；视$\boldsymbol{v}$为向量场，求

# 第十二章　含参变元的积分

P187L-2 最后加一句：定理也可以从连续函数重积分存在且可换为累次积分来证明，见定理11.6.

P191L4 “$g(x,t)$”改成：$g(t,x)$

P191L8 “$g(x,t)$”改成：$g(t,x)$

P191L13 定理*12.9* 标注为：[迪尼定理]

P191L15 “$F(t)$”改成：$\int_c^{+\infty} f(t,x)\mathrm{d}x$

P193L1 “$[c,+\infty]$”改成：$[c,+\infty)$

P193L7 定理放到定理*12.12*后面，且证明改为：

$$\begin{aligned}\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t} &= \int_c^{+\infty}\frac{f(t+\Delta t,x)-f(t,x)}{\Delta t}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{\Delta t}\int_c^{+\infty}\left(\int_t^{t+\Delta t} f_t(s,x)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

由$\int_c^{+\infty} f_t(t,x)\mathrm{d}x \rightrightarrows \varphi(t)$及$f_t(t,x)$连续，由积分换序的定理知上式

$$\begin{aligned}\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t} &= \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\left(\int_c^{+\infty} f_t(s,x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}s\\ &= \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\varphi(s)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

由定理12.10知$\varphi(t)$连续，故

$$\begin{aligned}F'(t) &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t}\\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\varphi(s)\mathrm{d}s\\ &= \varphi(t).\end{aligned}$$

P193L-6 去掉“$c>0$”中的“$>0$”

P194L-4 “$[c,+\infty)\times[\alpha,+\infty)$”改成：$[\alpha,+\infty)\times[c,+\infty)$

P194L-3 “$\mathrm{d}x$”改成：$\mathrm{d}t$

P194L-1 *"f(t,x)"*改成：$|f(t,x)|$ P195L2 *"f(t,x)"*改成：$|f(t,x)|$

P195L7 “$\le \mathrm{e}^{-x}$,而$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=1$”改成：$\le \mathrm{e}^{-ax}$,而$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}$

P197L5 “先令$A\to+\infty$,”后添加：第二项积分关于$A$一致收敛

P197L7 “先令$\delta\to 0$,”后添加：第二项积分关于$\delta$一致收敛

P203L7 “有”改为：断言

P203L8-12 改为：

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^x < 1+\frac{x}{n},$$

则有

$$\begin{aligned}
& \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \\
\leq\ & \frac{n^x}{x}\cdot\frac{1}{(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)} \\
\leq\ & \frac{n^x}{x}\cdot\frac{1}{(1+1)^x\left(1+\frac{1}{2}\right)^x\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)^x} \\
=\ & \frac{n^x}{x(n+1)^x} \\
\leq\ & \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

P203L-5“表达式。”改为：表达式，它对所有$x>0$成立。事实上，上面已经证明了这个表达式对于$x\in(0,1]$成立。在此基础上，计算

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= x\Gamma(x) \\
&= x\lim_{n\to+\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \\
&= x\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^x(n+1)!}{x(x+1)\cdots(x+n+1)} \\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^{x+1}n!}{(x+1)\cdots(x+n+1)} \\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{n^{x+1}n!}{(x+1)\cdots(x+n+1)}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{x+1} \\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{n^{x+1}n!}{(x+1)\cdots(x+n+1)},
\end{aligned}$$

及表达式在$(1,2]$上也成立。归纳可知，对于所有$x>0$都成立。

P207L-2“$\sin^{\alpha}$”改为：$\sin^n$

P208L2“$\sin^{\alpha}$”改为：$\sin^n$

P208L3,4 替换为：归纳如下：

$$\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1}\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} \\
&= a_{n-2}(\sqrt{\pi})^2\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} \\
&\cdots \\
&= a_1(\sqrt{\pi})^{n-1}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} \\
&= \frac{(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

P209L1 “$\neq$”改为：$=$
P209L4 “$e^{tx}$”改为：$e^{-tx}$
P209L7 “连续”改为：收敛
P209L-5 “$\frac{b}{a}$”改为：$\frac{a}{b}$

# 第十三章　级数

P214L12 后面添一段：

这个命题请读者试着证明一下。

值得指出的是，序列的极限点可能有无穷多。譬如第二章里曾经提到的$(0,1]$区间所有有理数形成序列$\{a_n\}$:

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\cdots$$

则任何一个该区间的有理数$\frac{p}{q}$都在其中有限项出现。

在此基础上构造一个新的序列$\{b_n\}$：

$$a_1,a_1,a_2,a_1,a_2,a_3,a_1,a_2,a_3,a_4,\cdots$$

即绕回去一圈再增一项，任何一个$(0,1]$上的有理数$\frac{p}{q}$仍在有限项出现，而且由于不断重复出现，可以取其为常值子序列，因此为极限点。于是任何一个有理数都是其极限点。

其实，$\{a_n\}$中就已经包含了所有这样的有理数为极限点，因为有常值子序列

$$\frac{p}{q},\frac{2p}{2q},\frac{3p}{3q},\cdots$$

不仅如此，$[0,1]$上的每一点都是极限点（请读者思考该怎样取子序列）。

P214L-6“此外”前添加：

$\exists N\in\mathbb{N},\forall m>N$,成立$x_m<\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\,x_n+\varepsilon.$

P218L2 第*2, 3*个求和下限分别改为 $n=2$,$n=3$

P219L5 ”$\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\,\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq 1$”改为：$\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\,\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$

P219L7 这里另添一段：

判别法的极限形式中，对下极限的要求是严格大于1，这是因为下极限等于1时可能出现收敛的情形，如级数各项为$1,1,\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{9},\frac{1}{9},\cdots.$

P220L-1 删掉该行及下一页前两行，即从“$\geq 0$”开始到下一页“$=$”前面一行

P221L5-L6 删掉这两行

P222L10“部分和”改为 部分和序列

P222L-11 ”计算”前加一行 则

$$|B_m|=\left|\sum_{k=1}^{n+m}b_k-\sum_{k=1}^{n}b_k\right|\leq 2M.$$

P222L-8 *”M”*改为 $2M$

P222L-7 *”M”*改为 $2M$

P222L-6 "$3M$"改为 $6M$

P227L-1 "发散到无穷"后添一句：$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$也不收敛。

P228L1-2 这两行改为：最后，我们不加证明地给出下述定理。

P228L4 "条件收敛。"改为 收敛于二者之积。

P229L4 "无穷乘积"前添一句：若$a_n \geq 1$,

P229L8 "按照"改为 按照正项级数的

P229L11 "无穷乘积"前添一句：若$\alpha_n \geq 0$,

P229L11 这一段下面添一段：称无穷乘积$\prod_{n=1}^{+\infty}(1+\alpha_n)$绝对收敛，若$\prod_{n=1}^{+\infty}(1+|\alpha_n|)$收敛；称$\prod_{n=1}^{+\infty}(1+\alpha_n)$条件收敛，若它本身收敛而$\prod_{n=1}^{+\infty}(1+|\alpha_n|)$发散。

P230L7 $f_2(x)$ 定义第3行修改，并增加一行：

$$\begin{array}{ll} 2-4x, & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{array}$$

P230L11 $f_n(x)$ 定义第3行修改，并增加一行：

$$\begin{array}{ll} 2-2^n x, & 2^{-n} \leq x \leq 2^{-n+1}, \\ 0, & 2^{-n+1} \leq x \leq 1, \end{array}$$

P233L11 此段后添一段：此即

$$\lim_{p \to +\infty} \sum_{n=1^p} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

P234L2 "因此"后添一句：类似Newton-Leibniz公式的推导可知

P240 此后部分改写如下

### §13.3.2 傅里叶级数

函数$f(x)$的泰勒级数的有限和序列是$\{1, x-x_0, (x-x_0)^2, \cdots, (x-x_0)^n\}$的线性组合，可以看做是它在一组幂函数“基”$\{1, x-x_0, (x-x_0)^2, \cdots, (x-x_0)^n, \cdots\}$上的投影[1]。如果我们换一组“基”，又会怎样呢？

方便起见，我们考虑$[0, 2\pi]$上的函数$f(x)$,要求$f(0) = f(2\pi)$.傅里叶级数采用了$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots\}$,它们成立以下一些积分等式。

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos kx \mathrm{d}x &= 0, \\
\int_0^{2\pi} \sin kx \mathrm{d}x &= 0, \\
\int_0^{2\pi} \cos kx \sin \ell x \mathrm{d}x &= 0, \\
\int_0^{2\pi} 1 \mathrm{d}x &= 2\pi, \\
\int_0^{2\pi} \cos kx \cos \ell x \mathrm{d}x &= \pi \delta_{k\ell}, \\
\int_0^{2\pi} \sin kx \sin \ell x \mathrm{d}x &= \pi \delta_{k\ell},
\end{aligned}$$

其中$k, \ell \in \mathbb{N}$,$\delta_{k\ell}$是克罗尼克尔德尔塔符号，当$k = \ell$时为1，否则为0.

如果以进一步单位化后的两两正交函数系

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \cdots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \cdots \right\}$$

作为内积空间中的线性无关向量组，系数取为

$$\begin{aligned}
a_0 &= \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, f(x) \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \mathrm{d}x, \\
a_j &= \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos jx, f(x) \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \cos jx \mathrm{d}x, \\
b_j &= \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin jx, f(x) \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \sin jx \mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

从而$f(x)$给出了三角函数项级数

$$\frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

[1]按照线性代数的语言，这些幂函数确实是线性无关的，因此可以作为基；但这里有无穷个这样的函数，这就跟线性代数里的有限维线性空间不同了。

傅里叶级数的上述变换公式称为欧拉-傅里叶公式。[2]

在讨论级数的收敛性之前，我们注意到只要$f(x)$有周期为$2\pi$，并在该周期上可积、或者有瑕点但广义绝对可积，那么上面的系数以及相应的级数都可以定义出来。

### §13.3.3 傅里叶级数的均方收敛性

对于$2\pi$周期函数序列$\{f_n(x)\}$，考虑以下三种不同的收敛性。

称$f_n(x)$均方收敛到函数$f(x)$,若$\|f_n - f\|_2 = \left(\int_0^{2\pi} (f_n(x) - f(x))^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$.

称$f_n(x)$逐点收敛到函数$f(x)$,若$\forall x, \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$.

称$f_n(x)$一致收敛到函数$f(x)$,若$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x, \forall n > N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$,记为$f_n(x) \rightrightarrows f(x)$.

容易看出一致收敛可以推出逐点收敛和均方收敛，而反过来一般不成立。

先讨论傅里叶级数的均方收敛性。

傅里叶级数的部分和

$$S_n(x) = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

代入系数表达式并整理可得（以下用到了周期性）

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx)\right] \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(u+x) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos ku\right) \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u+x) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}} \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u+x) \frac{\cos nu - \cos(n+1)u}{1-\cos u} \mathrm{d}u. \end{aligned}$$

把自变量$u$换成$-u$,利用周期性容易看出，上式就是

$$f(u) * \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\pi \sin\frac{x}{2}},$$

这里卷积后面的函数称为狄利克雷核函数。

[2]如果调整一下表达式，也可以说级数为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

其中

$$a_j = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos jx \mathrm{d}x, \quad b_j = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin jx \mathrm{d}x.$$

通过组合这些部分和，如下定义的Fejer和可表示为

$$\begin{aligned}\sigma_n(x) &= \frac{1}{n}\left(S_0(x)+\cdots+S_{n-1}(x)\right)\\ &= \frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi} f(u+x)\frac{1-\cos nu}{1-\cos u}\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi} f(u+x)\left(\frac{\sin\frac{nu}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\right)^2\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

这个也可以改写成$f(x)$和Fejer核函数

$$\frac{1}{2n\pi}\left(\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2$$

的卷积。

特别的，容易知道，函数$f(x)=1$时，$a_0=2\sqrt{\pi}$,其它系数均为0，即有$\forall n,\sigma_n\equiv 1$.从而上式给出

$$\frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin\frac{nu}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\right)^2\mathrm{d}u=1.$$

回到最初的假设，若$f\in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{N})$,则它有界（记为$M$），且一致连续。从而，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x_1,x_2$, 只要$|x_1-x_2|<\delta$，就有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

直接计算可知（再次用到周期性）

$$\begin{aligned}|\sigma_n(x)-f(x)| &= \left|\frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}(f(u+x)-f(x)\left(\frac{\sin\frac{nu}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\right)^2\mathrm{d}u\right|\\ &\le \frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}|f(u+x)-f(x)|\left(\frac{\sin\frac{nu}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\right)^2\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{2n\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\right)|f(u+x)-f(x)|\left(\frac{\sin\frac{nu}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\right)^2\mathrm{d}u\\ &\quad+\frac{1}{2n\pi}\int_{-\delta}^{\delta}|f(u+x)-f(x)|\left(\frac{\sin\frac{nu}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\right)^2\mathrm{d}u\\ &\le \frac{2M}{n\sin^2\frac{\delta}{2}}+\varepsilon.\end{aligned}$$

因此，只要取$n>N\equiv\left[\frac{\sin^2\frac{\delta}{2}}{2M\varepsilon}\right]+1$,就有

$$|\sigma_n(x)-f(x)|<2\varepsilon.$$

于是，我们证明了$\sigma_n(x)\rightrightarrows f(x)$.

**定理13.3.1** (Fejer定理). *$2\pi$周期的连续函数可由三角函数项级数一致逼近。*

由傅里叶级数是内积空间中的坐标表示，即$S_n(x)$是$f(x)$在子空间

$$\mathrm{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\cdots,\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\right\}$$

上的投影，从而

$$\|f(x)-S_n(x)\|\le\|f(x)-\sigma_n(x)\|.$$

再由一致逼近必均方逼近，必有

$$\lim_{n\to+\infty}\|f(x)-S_n(x)\|=\|f(x)-\sigma_n(x)\|.$$

**定理13.3.2** (均方收敛定理). *若函数$2\pi$周期且连续，其傅里叶级数级数均方逼近于该函数。*

再由贝塞尔等式，就得到帕萨瓦尔(Parseval)等式

$$\|f\|^2=\frac{a_0^2}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2).$$

均方收敛定理可以推广到可积函数。

若$f(x)$为$2\pi$周期函数，且在$[0,2\pi]$上可积。$\forall\varepsilon>0$,由可积性，$f$有界，上下确界分别记为$M,m$,且$\exists N\in\mathbb{N}$, 当$n>N$, 作$[0,2\pi]$的$n$等分的等距分割$P$，满足

$$\Omega(f,P)=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x<\frac{\varepsilon^2}{M-m},$$

这里$M_k,m_k$分别是$f$在第$k$个小区间$[(k-1)\Delta x,k\Delta x]$上的上下确界。

构造分段折线函数$g^\varepsilon(x)$,在第$k$个小区间上$(k=1,\cdots,n)$

$$g^\varepsilon(x)=f(x_{k-1})+\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{\Delta x}(x-x_{k-1}),$$

显然在这个区间上$g^\varepsilon(x)\in[m_k,M_k]$为连续函数，并有

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}(g^\varepsilon(x)-f(x))^2\mathrm{d}x&\le\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)^2\Delta x\\&\le(M-m)\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x\\&\le\varepsilon^2.\end{aligned}$$

这就是说

$$\|f-g^\varepsilon\|\le\varepsilon.$$

再由$g^\varepsilon(x)$的傅里叶级数部分和序列$S_n^\varepsilon(x)$均方收敛于它自身，即存在$\tilde{N}\in\mathbb{N},\forall n>\tilde{N}$,成立

$$\|S_n^\varepsilon(x)-g^\varepsilon(x)\|\le\varepsilon,$$

用范数的三角形不等式知道，当$n > \max(N, \tilde{N})$,

$$\|S_n^{\varepsilon}(x) - f(x)\| \leq 2\varepsilon.$$

即该级数也均方收敛于$f(x)$.

如果作更多推导，还可以证明以下结论。

1，若$\{S_n\}$一致收敛，则必收敛于$f(x)$.

2,若$f, g$均可积，且傅里叶系数分别是$a_n, b_n$和$\alpha_n, \beta_n$,那么

$$\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x = \frac{a_0\alpha_0}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\alpha_n + b_n\beta_n).$$

如果$f(x)$有更高阶的连续性，那么均方收敛性也可以改进。

首先，利用柯西不等式知($x \in [0, 2\pi]$)

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^x S_n(u)\mathrm{d}u - \int_0^x f(u)\mathrm{d}u\right| \\
\leq &\int_0^x |S_n(u) - f(u)|\mathrm{d}u \\
\leq &\sqrt{\int_0^x 1^2\mathrm{d}u \int_0^x (S_n(u) - f(u))^2\mathrm{d}u} \\
\leq &\sqrt{2\pi}\|S_n(x) - f(x)\|,
\end{aligned}$$

这就给出了关于$x$的一致估计，从而有下述定理。

**定理13.3.3.** *若$f(x)$在$[0, 2\pi]$可积，其傅里叶级数为$\frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$,则*

$$\frac{a_0 x}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x (a_n\cos nu + b_n\sin nu)\mathrm{d}u \rightrightarrows \int_0^x f(u)\mathrm{d}u.$$

由此看出，若$f(x) \in C^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$,那么$f'(x)$的傅里叶级数

$$\frac{\tilde{a}_0}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{+\infty}(\tilde{a}_n\cos nx + \tilde{b}_n\sin nx)$$

中必无常数项，即$\tilde{a}_0 = 0$.由上述定理，

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x (\tilde{a}_n\cos nu + \tilde{b}_n\sin nu)\mathrm{d}u \rightrightarrows f(x) - f(0),$$

如果记

$$a_n = -\frac{\tilde{b}_n}{n}, \quad b_n = \frac{\tilde{a}_n}{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

以及

$$a_0 = 2\left(\sqrt{\pi}f(0) + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\tilde{b}_n}{n}\right),$$

这就是

$$\frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \rightrightarrows f(x).$$

进一步，若$f \in C^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, 那么$f(x), f'(x)$的傅里叶级数一致收敛，从而若

$$f(x) = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

则可以逐项求导

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{+\infty}(+nb_n\cos nx - na_n\sin nx).$$

特别的，对于$2\pi$周期的初等函数，傅里叶级数一致收敛，可以逐项积分和求导。

### §13.3.4 傅里叶级数的逐点收敛性

傅里叶级数的逐点收敛性，我们要研究

$$f_\infty(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

是否收敛以及是否收敛到$f(x)$.比较完整的研究涉及到函数$f(x)$的性质、以及积分的定义，这里我们仅就比较典型的情形、局限在黎曼积分下进行讨论。

用到以下两个引理。

**定理13.3.4** (黎曼-勒贝格(Riemann-Lebesgue)引理). *若函数$f(x)$在区间$[\alpha,\beta]$上可积或广义绝对可积*[3],*则*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\alpha^\beta f(x)\cos jx\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{\alpha^\beta} f(x)\sin jx\mathrm{d}x = 0.$$

**定理13.3.5** (狄利克雷积分). $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$

[3]允许有瑕点。

利用周期性，在任一点$x_0$处的有限和

$$\begin{aligned}S_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x_0+u)\frac{\sin\dfrac{(n+1)u}{2}}{2\sin\dfrac{u}{2}}\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x_0-u)\frac{\sin\dfrac{(n+1)u}{2}}{2\sin\dfrac{u}{2}}\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(x_0+u)+f(x_0-u)}{2}\frac{\sin\dfrac{(n+1)u}{2}}{2\sin\dfrac{u}{2}}\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x_0+u)+f(x_0-u)}{2}\frac{\sin\dfrac{(n+1)u}{2}}{2\sin\dfrac{u}{2}}\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

方便起见，以下记

$$g(u,x_0)=\frac{f(x_0+u)+f(x_0-u)}{2}.$$

**定理13.3.6** (黎曼局域化原理). *若周期函数$f(x)$在区间$[0,2\pi]$上可积或广义绝对可积，那么其傅里叶级数在点$x_0\in(0,2\pi)$的收敛性和极限，仅与任意选定$\delta>0$的邻域$U(x_0,\delta)$有关。*

事实上，先将$S_n(x)$表达式中的积分分成两段，

$$S_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{g(u,x_0)}{\sin\dfrac{u}{2}}\sin\frac{(n+1)u}{2}\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\frac{g(u,x_0)}{\sin\dfrac{u}{2}}\sin\frac{(n+1)u}{2}\mathrm{d}u,$$

在$u\in[\delta,\pi]$上，$\dfrac{g(u,x_0)}{\sin\dfrac{u}{2}}$是可积或广义绝对可积的（分母为非0有界函数），因此

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\delta}^{\pi}\frac{g(u,x_0)}{\sin\dfrac{u}{2}}\sin\frac{(n+1)u}{2}\mathrm{d}u=0.$$

所以，傅里叶级数的收敛性和极限，仅与任意选定$\delta>0$的邻域$U(x_0,\delta)$有关。

再注意到

$$\frac{1}{2\sin\dfrac{u}{2}}-\frac{1}{u}=\frac{u-2\sin\dfrac{u}{2}}{2u\sin\dfrac{u}{2}}$$

在$[0,\delta]$上有界（当$u\to0+$时极限为0），因此由黎曼-勒贝格引理，

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\delta}g(u,x_0)\left[\frac{1}{2\sin\dfrac{u}{2}}-\frac{1}{t}\right]\sin\frac{(n+1)u}{2}\mathrm{d}u=0;$$

另一方面，若$\int_0^\delta \frac{|g(u,x_0)-g(0+,x_0)|}{u}\mathrm{d}u$收敛，计算可知(还是由黎曼-勒贝格引理)

$$\begin{aligned}
&\int_0^\delta \frac{g(u,x_0)}{u}\sin\frac{(n+1)u}{2}\mathrm{d}u\\
=&\int_0^\delta \frac{g(u,x_0)-g(0+,x_0)}{u}\sin\frac{(n+1)u}{2}\mathrm{d}u+g(0+,x_0)\int_0^\delta \frac{\sin\frac{(n+1)u}{2}}{u}\mathrm{d}u\\
=&\int_0^\delta \frac{g(u,x_0)-g(0+,x_0)}{u}\sin\frac{(n+1)u}{2}\mathrm{d}u+g(0+,x_0)\int_0^{(n+\frac{1}{2})\delta} \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u\\
\to&g(0+,x_0)\int_0^{(n+\frac{1}{2})\delta} \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

综上可知

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(x_0)=\frac{\pi}{2}g(0+,x_0).$$

因此，我们得到以下结论。

**定理13.3.7** (狄尼(Dini)判别法)**.** *若周期函数$f(x)$在$[0,2\pi]$上可积或广义绝对可积，且对足够小的$\delta>0$,有$\int_0^\delta \frac{|g(t,x_0)-g(0+,x_0)|}{t}\mathrm{d}t$收敛，则$f(x)$的傅里叶级数在$x_0$收敛于*

$$g(0+,x_0)=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

狄尼判别法中的条件在以下一些情况下是满足的，于是傅里叶级数在$x_0$点(或区间上任一点)收敛于其左右极限的均值。

1. 可微或分段可微；
2. 在$x_0$点连续或为第一类间断，且满足李普希兹条件:$\exists L>0,s>0,\delta>0,\forall u\in(0,\delta]$,
$$|f(x_0\pm u)-f(x_0\pm 0)|\le Lu^s;$$
3. 不连续点和不可微点仅有限个。

**例13.1.** *对于$2\pi$-周期函数$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<\pi,\\ -1, & \pi<x<2\pi,\end{cases}$分析其傅里叶级数及收敛情况*[4]*。*

**解.** *由于这是一个奇函数，其常数项及余弦项系数为0, 而*

$$\begin{aligned}
b_n&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x\\
&=\frac{1-(-1)^n}{n\pi}.
\end{aligned}$$

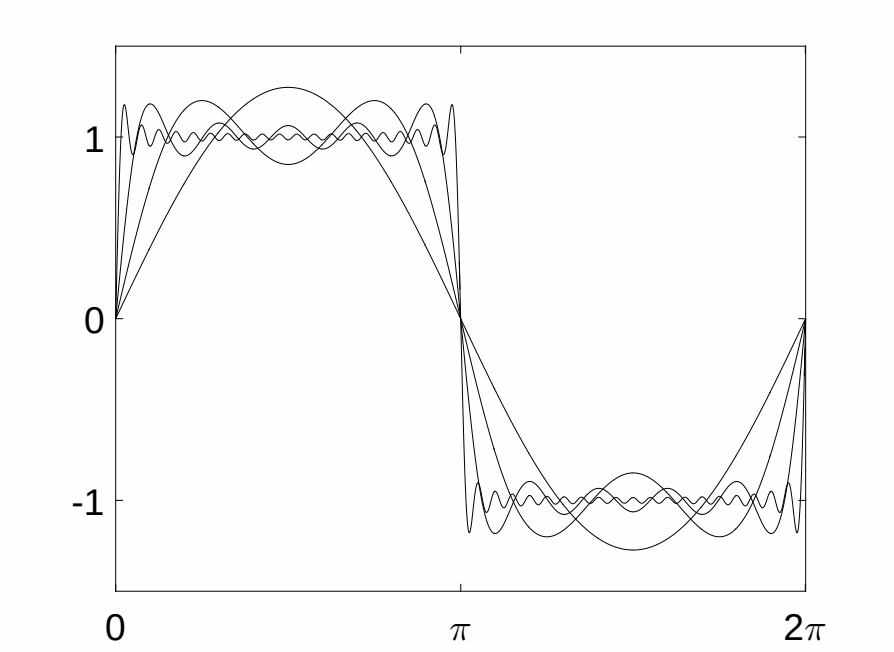



图 13.1 方波的傅里叶级数近似：从内到外依次为$f_1(x), f_3(x), f_9(x), f_{39}(x)$.

由于函数除了$0, \pi$处以外均可微，因此傅里叶级数除了在间断点以外收敛到函数值，但是在间断点处收敛到左右极限的均值*0.*

从图13.1可以看到，即使到$f_{39}(x)$，在间断点附近也有一个大概$\pm 0.2$的振幅，而且这一振幅并不随项数的增加而减小，这称为吉布斯(Gibbs) 现象。这与均方收敛不矛盾，振荡的宽度随项数增加而缩窄。

**例13.2.** 对于$2\pi$-周期函数$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \pi, \\ x - 2\pi, & \pi < x < 2\pi, \end{cases}$ 分析其傅里叶级数及收敛情况[5]。

**解.** 由于这是一个奇函数，其常数项及余弦项系数为*0*，而

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \mathrm{d}x \\ &= \frac{2 \times (-1)^n}{n}. \end{aligned}$$

由于函数除了$\pi$处以外均可微，因此傅里叶级数除了在间断点以外收敛到函数值（参考图*13.2*），但是在间断点处收敛到左右极限的均值*0.*

**例13.3.** 对于$2\pi$-周期函数$f(x) = x^2, (-\pi \le x \le \pi)$,计算其傅里叶级数。

[4]在信号分析的应用中，它代表了方波。
[5]在信号分析的应用中，它代表了锯齿波。

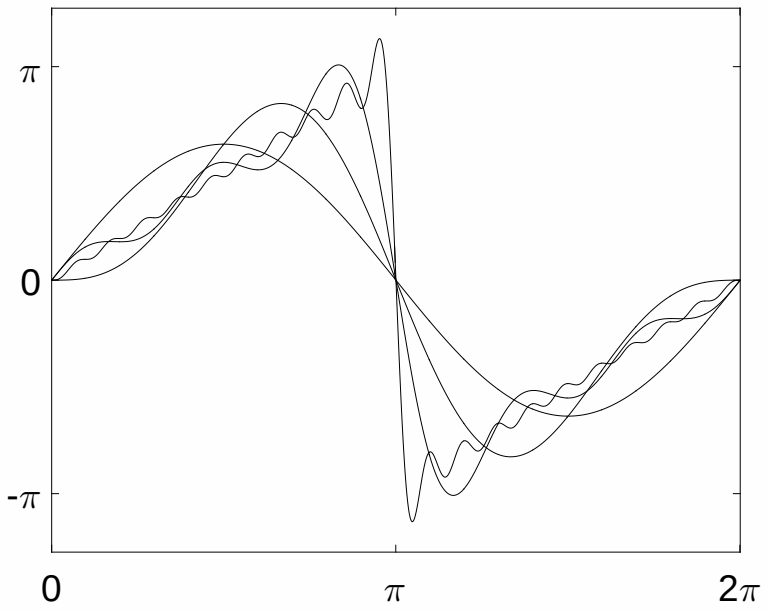



图 13.2 锯齿波的傅里叶级数近似：从内到外依次为$f_1(x), f_3(x), f_6(x), f_{21}(x)$.

**解.** 由于这是一个偶函数，其正弦项系数为*0*，而

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{\pi^5}, \\ a_n &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{2\pi} x^2 \cos nx \mathrm{d}x \\ &= \frac{4\sqrt{\pi} \times (-1)^n}{n^2}. \end{aligned}$$

于是，傅里叶级数为

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx.$$

容易看出，该傅里叶级数一致收敛。

### §13.3.5 傅里叶级数的推广

上面的分析容易推广到$2L$-周期的函数。考虑$[0, 2L]$上定义的函数$f(x)$，

我们做坐标变换$x \to \tilde{x} = \dfrac{\pi x}{L}$，就得到新的函数$f(\tilde{x})$,傅里叶级数为

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\tilde{x}) \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\tilde{a}_n \cos n\tilde{x} + \tilde{b}_n \sin n\tilde{x}) \right] \\ &\equiv \frac{1}{\sqrt{L}} \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \right], \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{\frac{L}{\pi}} \int_0^{2\pi} f(\tilde{x}) \frac{\cos n\tilde{x}}{\sqrt{\pi}} \mathrm{d}\tilde{x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{L}} \int_0^{2L} f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x \mathrm{d}x, \\ b_n &= \sqrt{\frac{L}{\pi}} \int_0^{2\pi} f(\tilde{x}) \frac{\sin n\tilde{x}}{\sqrt{\pi}} \mathrm{d}\tilde{x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{L}} \int_0^{2L} f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

在很多应用中，会将傅里叶级数定义成一个复数形式的。也就是说，对于$2\pi$-周期的函数$f(x)$，考虑

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} = \frac{c_0}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{+\infty} ((c_n + c_{-n}) \cos nx + i(c_n - c_{-n}) \sin nx),$$

与实数形式的傅里叶级数比较可见：

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \mathrm{d}x, \\ c_n &= \frac{a_n - ib_n}{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x)(\cos nx - i \sin nx) \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} \mathrm{d}x, \\ c_{-n} &= \frac{a_n + ib_n}{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) e^{inx} \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

于是有统一的表达式($n \in \mathbb{Z}$)

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} \mathrm{d}x.$$

对于$2L$-周期的函数，复数形式的傅里叶级数为

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2L}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{2n\pi}{L}x},$$

其中

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2L}} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-i\frac{2n\pi}{L}x} \mathrm{d}x.$$

### §13.3.6 傅里叶变换

针对$\mathbb{R}$ 上的$L^1$可积（绝对可积）复值函数$f(x)$,[6]其傅里叶变换给出一个复值函数$\hat{f}(k)$, 由下式定义

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ikx} \mathrm{d}x.$$

由于$f(x)$绝对可积，由比较判别法上述积分收敛，从而$\hat{F}(k)$良定义。上式常常也记作$\mathcal{F}(f)(k)$,并把$\mathcal{F}$ 这个函数间的映射称为傅里叶变换。[7]

反过来，如果给定了一个$\mathbb{R}$ 上的$L^1$可积（绝对可积）复值函数$\hat{f}(k)$,定义逆变换

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(k) e^{ikx} \mathrm{d}k.$$

也记为$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x)$.

由定义式可见，傅里叶变换及逆变换都是线性的，即

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\lambda f + \mu g)(k) &= \lambda \mathcal{F}(f)(k) + \mu \mathcal{F}(g)(k), \\ \mathcal{F}^{-1}(\lambda \hat{f} + \mu \hat{g})(x) &= \lambda \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x) + \mu \mathcal{F}^{-1}(\hat{g})(x). \end{aligned}$$

可以这样定义正、逆两个方向的傅里叶变换，是基于以下定理，以及注意到函数$f(x) = 0$与变换$\hat{f}(k) = 0$是一一对应的关系。

**定理13.3.8** (傅里叶积分定理)**.** *若$f(x) \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$,定义*

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ikx} \mathrm{d}x,$$

*则$\forall x \in \mathbb{R}$,成立*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} V.P. \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(k) e^{ikx} \mathrm{d}k \equiv \lim_{A \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} \hat{f}(k) e^{ikx} \mathrm{d}k = f(x).$$

---

[6]函数在区域$\Omega$上的$L^1$范数是指$\int_\Omega |f(\boldsymbol{x})| \mathrm{d}\boldsymbol{x}$, 这里在$\mathbb{R}$ 上就是$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| \mathrm{d}x$. $L^1$范数有界的函数构成了$L^1$空间。

[7]也有用函数本身小写字母$f$对应的大写字母$F(k)$来表示，如果是$g(x)$的傅里叶变换就写成$G(k)$.

由于复值函数$f$可以分解成实部和虚部各一个实函数，而傅里叶变换及逆变换都是线性的，因此以下不妨仅考虑$f(x)$为实函数。

定理的证明依赖于以下两个基本结论。

**定理13.3.9** (黎曼-勒贝格引理(Riemann-Lebesgue's lemma)). *若$f(x) \in C[a,b]$,则*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\sin nx \mathrm{d}x = 0.$$

另一个是通过含参变量积分（或复变函数方法）得到的狄里克雷积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \pi.$$

以下证明傅里叶积分定理。

**证明.** *由$f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$,用比较判别法知$\int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-iky}\mathrm{d}y$关于$k$一致收敛、连续。*

*先固定$x \in \mathbb{R}$以及$A, B > 0$.*[8]

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} \hat{f}(k)e^{ikx}\mathrm{d}k \\
= &\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(y) \left[\int_{-A}^{A} e^{ik(x-y)}\mathrm{d}k\right] \mathrm{d}y \\
= &\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{\sin A(x-y)}{x-y}\mathrm{d}y \\
= &\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x+\eta) \frac{\sin A\eta}{\eta}\mathrm{d}\eta.
\end{aligned}$$

*将该积分分为三段*

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-B} f(x+\eta) \frac{\sin A\eta}{\eta}\mathrm{d}\eta, \\
I_2 &= \frac{1}{\pi} \int_{-B}^{B} f(x+\eta) \frac{\sin A\eta}{\eta}\mathrm{d}\eta, \\
I_3 &= \frac{1}{\pi} \int_{B}^{+\infty} f(x+\eta) \frac{\sin A\eta}{\eta}\mathrm{d}\eta,
\end{aligned}$$

*容易证明*

$$|I_1|, |I_3| \le \frac{1}{B\pi} \int_{\mathbb{R}} |f(y)|\mathrm{d}y,$$

*于是当$B \to +\infty$, 这两项都是无穷小量。*

[8]下面的积分换序我们不作证明，而积分也都当作黎曼积分看待。一般性理论需要实变函数的知识。

另一方面，

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-B}^{B} \frac{f(x+\eta)-f(x)}{\eta}\sin A\eta \mathrm{d}\eta + \frac{f(x)}{\pi}\int_{-B}^{B}\frac{\sin A\eta}{\eta}\mathrm{d}\eta.$$

注意到$f \in C^1(\mathbb{R})$,

$$\frac{f(x+\eta)-f(x)}{\eta} = \int_0^1 f'(x+\tau\eta)\mathrm{d}\tau$$

是关于$\eta$的连续函数，由黎曼-勒贝格引理，$I_2$中第一项当$A \to +\infty$也是无穷小量。

而由狄里克雷积分，当$B \to +\infty$时，

$$\int_{-B}^{B}\frac{\sin A\eta}{\eta}\mathrm{d}\eta = \int_{-AB}^{AB}\frac{\sin\zeta}{\zeta}\mathrm{d}\zeta \to 1.$$

总之，当$A, B \to +\infty$得

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}V.P.\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(k)e^{ikx}\mathrm{d}k \equiv \lim_{A\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A}\hat{f}(k)e^{ikx}\mathrm{d}k = f(x).$$

以下是傅里叶变换的一些基本性质（以下函数$f, g \in L^1(\mathbb{R})$,需要时也同时要求$C^1(\mathbb{R})$）。

1. $\mathcal{F}(\lambda f + \mu g) = \lambda\hat{F} + \mu\hat{g}$.
2. $\mathcal{F}(f')(k) = ik\hat{f}$,这里假设$f(x), f'(x) \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$.
3. $\mathcal{F}(xf) = i\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\hat{f}(k)$.
4. $\mathcal{F}(f(\alpha x))(k) = \dfrac{1}{|\alpha|}\hat{f}\left(\dfrac{k}{\alpha}\right)$.
5. 若$\mathcal{F}(f(x))(k) = \hat{f}(k)$,那么$\mathcal{F}(\hat{f}(x))(k) = f(-k)$.
6. $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = \hat{f}(0)$.
7. 若$f(x), g(x) \in L^1(\mathbb{R})$,则卷积

$$(f*g)(x) \equiv \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y \in L^1(\mathbb{R}),$$

且

$$\mathcal{F}(f*g) = \sqrt{2\pi}\hat{f}\hat{g}.$$

这里仅就卷积的傅里叶变换是各自傅里叶变换的乘积作简单解释。直接计算

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f*g) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-ikx}\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-iky}g(y)\int_{\mathbb{R}} e^{-(ik(x-y))}f(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-iky}g(y)\int_{\mathbb{R}} e^{-(ik(x-y))}f(x-y)\mathrm{d}(x-y)\mathrm{d}y\\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-iky}g(y)\hat{f}(k)\mathrm{d}y\\ &= \sqrt{2\pi}\hat{g}(k)\hat{f}(k).\end{aligned}$$

上面作变量替换$(x,y)\to(x-y,y)$时用到其雅可比行列式等于1.

以下算几个傅里叶变换。

**例13.4.** *求宽度为$2A$的方形脉冲函数*

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le A;\\ 0, & |x|>A\end{cases}$$

*的傅里叶变换。*

**解.** *直接计算得*

$$\hat{f}(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A} e^{-ikx}\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin kA}{k}.$$

根据对称性，sinc函数的傅里叶变换就是窗口函数或低通滤波器($A=1$)

$$\mathcal{F}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}, & |k|\le 1;\\ 0, & |k|>1.\end{cases}$$

用它与一个函数卷积就只留下其波数在$[-1,1]$(或更一般的$[-A,A]$)的成分。

**例13.5.** *求半边指数函数*

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x\ge 0;\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

*的傅里叶变换。*

**解.** *计算得*

$$\hat{f}(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} e^{-(1+ik)x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+ik)}.$$

于是，对称的函数

$$f(x)=e^{-|x|},$$

傅里叶变换为

$$\hat{f}(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+ik)}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-ik)}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}(1+k^2)}.$$

**例13.6.** 求高斯函数

$$f(x)=e^{-x^2}$$

的傅里叶变换。

**解.** 计算如下：

$$\begin{aligned}\hat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2-ikx}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(-ik)}\left[e^{-x^2}e^{-ikx}|_{-\infty}^{+\infty}-\int_{\mathbb{R}} e^{-ikx}e^{-x^2}(-2x)\mathrm{d}x\right]\\ &= \frac{-2}{ik}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\left(xe^{-x^2}\right)e^{-ikx}\mathrm{d}x\\ &= \frac{-2}{ik}\mathcal{F}(xe^{-x^2})\\ &= \frac{-2}{k}\frac{\mathrm{d}\hat{f}}{\mathrm{d}k}.\end{aligned}$$

易知$\hat{f}(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2}}$.解常微分方程

$$\hat{f}'(k)=-\frac{k}{2}\hat{f}(k),\quad \hat{f}(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

得

$$\hat{f}(k)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{k^2}{4}}.$$

也可以用复变函数的手段计算高斯函数的傅里叶变换。考虑

$$\begin{aligned}\hat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2-ikx}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-(x+ik/2)^2}\mathrm{d}x e^{-\frac{k^2}{4}},\end{aligned}$$

在由$\mathrm{Re}z=\pm A,\mathrm{Im}z=0,\mathrm{Im}z=ik/2$围成区域中$e^{-z^2}$解析，且当$A\to+\infty$时$\mathrm{Re}z=\pm A$的两段线段上积分趋于0，因而

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-(x+ik/2)^2}\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi},$$

从而

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{k^2}{4}}.$$

还可以再作一个尺度变换。考虑

$$f(x) = e^{-Ax^2},\ A > 0.$$

其傅里叶变换为

$$\begin{aligned} \hat{f}(k) &= \mathcal{F}\left(e^{-(\sqrt{A}x)^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{A}} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{(k/\sqrt{A})^2}{4}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2A}} e^{-\frac{k^2}{4A}}. \end{aligned}$$

特别地，如果取$A = \frac{1}{2}$,则

$$\mathcal{F}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = e^{-\frac{k^2}{2}},$$

高斯函数可以看作是傅里叶变换下的“不动点”（在等同$x, k$空间后）。

最后，再“不严格”地计算德尔塔函数的傅里叶变换

$$\mathcal{F}(\delta(x))(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} \delta(x) \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

上述傅里叶变换的讨论可以推广到多维空间。跟之前一样，记多元空间变量

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d,$$

再定义波矢量

$$\boldsymbol{k} = (k_1, \cdots, k_d) \in \mathbb{R}^d.$$

对函数$f(\boldsymbol{x}) \in L^1(\mathbb{R}^d)$,定义

$$\mathcal{F}(f)(\boldsymbol{k}) = \hat{f}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x}) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

其实，多元函数的傅里叶变换也可以等效变为对各个变量逐次进行一元的傅里叶变换。

逆变换公式为：

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \mathrm{d}\boldsymbol{k}.$$

多元傅里叶变换有以下一些性质。

1. 线性性：$\mathcal{F}(\lambda f + \mu g) = \lambda \hat{F} + \mu \hat{g}$.
2. 微商：$\mathcal{F}(\partial_{x_j} f)(\boldsymbol{k}) = ik_j \hat{f}$,这里假设$f(\boldsymbol{x}), \nabla f(\boldsymbol{x}) \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap C(\mathbb{R}^d)$.

3. 乘多项式：$\mathcal{F}(x_j f) = i\partial_{k_j}\hat{f}(\boldsymbol{k})$,这里假设$f(\boldsymbol{x}), x_j f(\boldsymbol{x}) \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

4. 平移：$\mathcal{F}(f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0))(\boldsymbol{k}) = e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}_0}\hat{f}(\boldsymbol{k})$.

5. 伸缩：$\mathcal{F}(f(\alpha\boldsymbol{x}))(\boldsymbol{k}) = \dfrac{1}{|\alpha|}\hat{f}\left(\dfrac{\boldsymbol{k}}{\alpha}\right)$.

6. 对称：若$\mathcal{F}(f(\boldsymbol{x}))(\boldsymbol{k}) = \hat{f}(\boldsymbol{k})$,那么$\mathcal{F}(\hat{f}(\boldsymbol{x}))(\boldsymbol{k}) = f(-\boldsymbol{k})$.

7. 积分：$\dfrac{1}{(\sqrt{2\pi})^d}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \hat{f}(0)$.

8. 若$f(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{x}) \in L^1(\mathbb{R}^d)$,则卷积

$$(f*g)(\boldsymbol{x}) \equiv \int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})g(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{y})g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y} \in L^1(\mathbb{R}^d),$$

且

$$\mathcal{F}(f*g) = (2\pi)^{\frac{d}{2}}\hat{f}\hat{g}.$$

9. 分离变量：若$f_1(x_1), \cdots, f_d(x_d) \in L^1(\mathbb{R})$,$f(\boldsymbol{x}) = f_1(x_1)\cdots f_d(x_d)$,则

$$\hat{f}(\boldsymbol{k}) = \hat{f}_1(k_1)\cdots\hat{f}_d(k_d).$$

傅里叶变换有直接的物理含义。注意到$e^{ik(2\pi/k)} = 1$,$e^{ikx}$表示波长为$\dfrac{2\pi}{k}$的空间振荡，称$k$为波数，在多维空间中称$\boldsymbol{k}$为波矢量，在这个方向上周期为$\dfrac{2\pi}{\|\boldsymbol{k}\|}$.[9]

多重傅里叶变换有两个有意义的特点。一方面，从

$$e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} = e^{ik_1x_1}\cdots e^{ik_dx_d}$$

可以看出其实我们是把函数$f(\boldsymbol{x})$按照波矢量$\boldsymbol{k}$分解成了模态，而每个模态都是分离变量形式的；当然分离变量法一般只能用于线性方程组求解，因此，傅里叶变换法通常也只用于线性偏微分方程。另一方面，回顾常微分方程中用$e^{\lambda t}$形式导出特征方程（关于$\lambda$的多项式）是基于它是微分算子的特征函数，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}.$$

在全空间的偏微分算子作用下

$$\partial_{x_p}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} = ik_p e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}},$$

可见$e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$是偏微分算子的特征函数，注意到实部非零的$e^{\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{x}}$在全空间无界，事实上$e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$是偏微分算子的有界特征函数。

[9]如果傅里叶变换是在时间方向上做，那么就会变到频率空间，一般把自变量$k$改记为$\omega$.

P247L10 求和下限改为 $n = 2$ P247L11 求和下限改为 $n = 3$